МГТУ имени Н.Э. Баумана
Кафедра ИУ-1 «Системы автоматического управления»

Методы вычислений

Численные методы решения СЛАУ

Андрей Леонидович Масленников
amas@bmstu.ru

2023 г.

Численные методы решения СЛАУ

Системы линейных алгебраических уравнений

Система линейных алгебраических уравнений:

$$\mathbf{Ax} = \mathbf{b} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots a_{1m}x_m = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots a_{2m}x_m = b_2 \\ \qquad \vdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots a_{nm}x_m = b_n \end{cases}$$

где:

n – количество уравнений
m – количество неизвестных
x_i – неизвестные
a_{ij} – коэффициенты
b_i – свободные члены
$\mathbf{A}$ – матрица $n \times m$
$\mathbf{x}$ – вектор $m \times 1$
$\mathbf{b}$ – вектор $n \times 1$

Решение СЛАУ имеет вид:

$$\mathbf{x} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{b}$$

Свойства СЛАУ:

- $b_i = 0$ — однородная система;
- $m = n$ — совместная система *(единственное решение)*
- $n > m$ — переопределенная система *(множество решений)*
- $n < m$ — недоопределённая система *(нет решений)*

Теорема Кронекера—Капелли.
Система уравнений $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ разрешима (имеет хотя бы одно решение) тогда и только тогда, когда $\mathrm{rang}(\mathbf{A}) = \mathrm{rang}(\mathbf{A}, \mathbf{b})$ где $(\mathbf{A}, \mathbf{b})$ — расширенная матрица системы. В этом случае количество искомых переменных равно порядку матрицы, а решение системы будет единственным.

Численные методы решения СЛАУ

Методы решения

Прямые методы решения СЛАУ — это методы в которых вычисление решения осуществляется за конечное количество операций

- метод решения через обратную матрицу;
- метод Крамера;
- метод Гаусса;
- метод Гаусса-Жордана;
- метод через разложение Холецкого;
- метод через LU-разложение;
- и др.

Решение будет найдено всегда, если метод применим, но возможны очень большие ошибки

Итерационные методы решения СЛАУ — это методы в которых вычисление решения осуществляется в результате последовательного приближения (итерационного процесса)

- метод Якоби
  (метод простой итерации)
- метод Гаусса-Зейделя;
- метод релаксации;
- метод сопряженных градиентов;
- метод бисопряженных градиентов;
- метод стабилизированных биспопряженных градиентов;
- и др.

Решение не всегда может быть найдено

Прямые методы решения СЛАУ

Метод решения через обратную матрицу

Алгоритм метода

1. Вычисляем все алгебраические дополнения

$$A_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}$$

2. Вычисляем обратную матрицу

$$\mathbf{A}^{-1} = \frac{1}{\det \mathbf{A}} \operatorname{adj} \mathbf{C}$$

3. Вычисляем решение

$$\mathbf{x} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{b}$$

Условия применимости

- $\det(\mathbf{A}) \neq 0$.

Метод требует существенных вычислительных ресурсов, если не использовать разложение исходной матрицы $\mathbf{A}$

Прямые методы решения СЛАУ

Метод Крамера

Вычисляем поэлементно решение

$$x_i = \frac{1}{\det(\mathbf{A})} \begin{vmatrix} a_{1,1} & \dots & b_1 & a_{1,i+1} \dots & a_{1,n} \\ & & \vdots & & \\ a_{n,1} & \dots & b_n & a_{n,i+1} \dots & a_{n,n} \end{vmatrix}$$

Условия применимости

- $\mathbf{A}$ — квадратная матрица;
- $\det(\mathbf{A}) \neq 0$.

Метод требует существенных вычислительных ресурсов

Прямые методы решения СЛАУ

Метод Гаусса

Алгоритм метода

$$
\left.\begin{aligned}
&\textbf{for } i = 1:n \\
&\quad \textbf{for } j = i+1:n \\
&\qquad k = a_{ji} / a_{ii} \\
&\qquad \mathbf{a}_j = \mathbf{a}_j - k\mathbf{a}_i \\
&\qquad b_j = b_j - kb_i \\
&\quad \textbf{end} \\
&\textbf{end}
\end{aligned}\right\} \text{прямой ход}
$$

$$
\left.\begin{aligned}
&\textbf{for } i = n:1 \\
&\quad x_i = \frac{b_i - \sum_{k=i+1}^{n} a_{ik} x_k}{a_{ii}} \\
&\textbf{end}
\end{aligned}\right\} \text{обратный ход}
$$

Условия применимости

- $\mathbf{A}$ — квадратная матрица

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{\text{прямой ход}} \mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -5 & -7 \\ 0 & 0 & -3.6 \end{bmatrix} \xrightarrow{\text{обратный ход}} \mathbf{x} = \begin{bmatrix} 0.1667 \\ 0.1666 \\ 0.1667 \end{bmatrix}$$

Устойчивость метода сильно зависит от диагональных элементов матрицы $\mathbf{A}$

Прямые методы решения СЛАУ

Метод Гаусса. Пример

Пусть даны

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Итерация 1 $\quad i = 1, \quad k = i + 1 = 2:$

$$\begin{bmatrix} 3 & 1 & 2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \end{bmatrix} \cdot \frac{3}{1} = \begin{bmatrix} 0 & -5 & -7 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 \end{bmatrix} \cdot \frac{3}{1} = \begin{bmatrix} -2 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -5 & -7 \\ 2 & 3 & 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Итерация 2 $\quad i = 1, \quad k = i + 1 = 3:$

$$\begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \end{bmatrix} \cdot \frac{2}{1} = \begin{bmatrix} 0 & -1 & -5 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 \end{bmatrix} \cdot \frac{2}{1} = \begin{bmatrix} -2 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -5 & -7 \\ 0 & -1 & -5 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ -1 \end{bmatrix}$$

Итерация 3 $\quad i = 2, \quad k = i + 1 = 3:$

$$\begin{bmatrix} 0 & -1 & -5 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & -5 & -7 \end{bmatrix} \cdot \frac{-1}{-5} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -3.6 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} (-1) \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} (-2) \end{bmatrix} \cdot \frac{-1}{-5} = \begin{bmatrix} -0.6 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -5 & -7 \\ 0 & 0 & -3.6 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ -0.6 \end{bmatrix}$$

Обратный ход

$$x_3 = -0.6 / (-3.6) = 0.1667$$

$$x_2 = \frac{-2 - (-7 \cdot 01667)}{-5} = 0.1666$$

$$x_1 = \frac{1 - (2 \cdot 01666 + 3 \cdot 0.1667)}{1} = 0.1667$$

Решение

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} 0.1667 \\ 0.1666 \\ 0.1667 \end{bmatrix}$$

Прямые методы решения СЛАУ

Метод Гаусса—Жордана

Алгоритм метода

$$\left.\begin{aligned}
&\textbf{for } i = 1:n\\
&\quad \textbf{for } j = i+1:n\\
&\qquad k = a_{ji} / a_{ii}\\
&\qquad \mathbf{a}_j = \mathbf{a}_j - k\mathbf{a}_i\\
&\qquad b_j = b_j - kb_i\\
&\quad \textbf{end}\\
&\textbf{end}
\end{aligned}\right\}\ \text{прямой ход}$$

$$\left.\begin{aligned}
&\textbf{for } i = n:1\\
&\quad \textbf{for } j = i-1:1\\
&\qquad k = a_{ji} / a_{ii}\\
&\qquad \mathbf{a}_j = \mathbf{a}_j - k\mathbf{a}_i\\
&\qquad b_j = b_j - kb_i\\
&\quad \textbf{end}\\
&\textbf{end}
\end{aligned}\right\}\ \text{обратный ход}$$

Условия применимости

- $\mathbf{A}$ — квадратная матрица

$$\mathbf{C} = (\mathbf{A},\mathbf{b}) = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 3 & 1 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

прямой ход

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & -5 & -7 & -2 \\ 0 & 0 & -3.6 & -0.6 \end{bmatrix}$$

обратный ход

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0.168 \\ 0 & -5 & 0 & -0.8333 \\ 0 & 0 & -3.6 & -0.6 \end{bmatrix}$$

вычисление решения

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} 0.1680 \\ 0.1660 \\ 0.1667 \end{bmatrix}$$

Прямые методы решения СЛАУ

Метод Гаусса—Жордана. Пример

После завершения прямого хода:

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & -5 & -7 & -2 \\ 0 & 0 & -3.6 & -0.6 \end{bmatrix}$$

Решение

$$x_1 = 0.168 / 1 = 0.1680$$

$$x_2 = (-0.8333) / (-5) = 0.1660$$

$$x_3 = (-0.6) / (-3.6) = 0.1667$$

$$i = 3, \qquad k = i - 1 = 2;$$

$$[0 \quad -5 \quad -7 \quad -2] - [0 \quad 0 \quad -3.6 \quad -0.6] \cdot \frac{-7}{-3.6} = [0 \quad -5 \quad 0 \quad -0.8333]$$

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & -5 & 0 & -0.8333 \\ 0 & 0 & -3.6 & -0.6 \end{bmatrix}$$

$$i = 3, \qquad k = i - 1 = 1;$$

$$[1 \quad 2 \quad 3 \quad 1] - [0 \quad 0 \quad -3.6 \quad -0.6] \cdot \frac{3}{-3.6} = [1 \quad 2 \quad 0 \quad 0.5]$$

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 0.5 \\ 0 & -5 & 0 & -0.8333 \\ 0 & 0 & -3.6 & -0.6 \end{bmatrix}$$

$$i = 2, \qquad k = i - 1 = 1;$$

$$[1 \quad 2 \quad 0 \quad 0.5] - [0 \quad -5 \quad 0 \quad -0.833] \cdot \frac{2}{-5} = [1 \quad 0 \quad 0 \quad 0.168]$$

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0.168 \\ 0 & -5 & 0 & -0.8333 \\ 0 & 0 & -3.6 & -0.6 \end{bmatrix}$$

Прямые методы решения СЛАУ

Метод разложения Холецкого

Алгоритм метода

1. Находим разложение Холецкого
2. Решаем систему $\mathbf{Ly} = \mathbf{b}$
3. Решаем систему $\mathbf{L^T x} = \mathbf{y}$

Условия применимости

- $\boldsymbol{A}$ — положительно определенная матрица

Несимметричность матрицы $\boldsymbol{A}$ не накладывает ограничений на применимость, но полученное решение будет не соответствовать истинному.

Находим разложение Холецкого

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1.4 & 1 & 1 \\ 1 & 0.9 & 1 \\ 1 & 1 & 1.4 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \Rightarrow \mathbf{L} = \begin{bmatrix} 1.18 & 0 & 0 \\ 0.85 & 0.43 & 0 \\ 0.85 & 0.66 & 0.5 \end{bmatrix}$$

Решаем $\mathbf{Ly} = \mathbf{b}$

$$y_1 = 1/1.18 = 0.85$$

$$y_2 = \frac{1-(0.85\cdot 0.85)}{0.43} = 0.65$$

$$y_3 = \frac{1-(0.85\cdot 0.85 + 0.65\cdot 0.66)}{0.5} = -0.31$$

Решаем $\mathbf{L^T x} = \mathbf{y}$

$$x_3 = -0.31/0.5 = -0.62$$

$$x_2 = \frac{0.65 - 0.66\cdot(-0.62)}{0.43} = 2.48$$

$$x_1 = \frac{0.85-(0.85\cdot(-0.62)+0.85\cdot 2.48)}{1.18} = -0.62$$

Численные методы решения СЛАУ

Итерационные методы

Итерационные методы решения СЛАУ — это методы в которых вычисление решения осуществляется в результате последовательного приближения (итерационного процесса)

- метод Якоби
  (метод простой итерации)
- метод Гаусса-Зейделя;
- метод релаксации;
- метод сопряженных градиентов;
- метод бисопряженных градиентов;
- метод стабилизированных биспопряженных градиентов;
- и др.

Решение не всегда может быть найдено

Алгоритм итерационных методов

$$
\begin{array}{l}
\textbf{while} \;\; criteia \;\; ok \\
\quad \textbf{for}\, i = i : n \\
\qquad x_i = \ldots \\
\quad \textbf{end} \\
\quad k = k + 1 \\
\textbf{end}
\end{array}
$$

Критерии остановки:

- по максимальному количеству итераций

$$k \geq k_{\max}$$

- по величине относительной ошибки решения

$$\left\| \mathbf{x}_k - \mathbf{x}_{k-1} \right\| \leq \varepsilon$$

- по величине абсолютной ошибки решения

$$\left\| \mathbf{A}\mathbf{x}_k - \mathbf{b} \right\| \leq \varepsilon$$

Итерационные методы решения СЛАУ

Метод Якоби

Решение рассчитывается итерационно

- в векторно-матричном виде

$$\mathbf{x}_{k+1} = \mathbf{B}\mathbf{x}_k + \mathbf{g}$$

- в поэлементном виде

$$x_{i,k+1} = \frac{1}{a_{ii}}\left(b_i - \sum_{j\neq i} a_{ij} x_{j,k}\right)$$

где

$\mathbf{L}$, $\mathbf{U}$ — нижняя и верхняя треугольные части $\boldsymbol{A}$

$$\mathbf{D} = \mathrm{diag}(\mathbf{A})$$

$$\mathbf{B} = \mathbf{I} - \mathbf{D}^{-1}\mathbf{A} = \mathbf{D}^{-1}(\mathbf{D} - \mathbf{A})$$

$$\mathbf{B} = -\mathbf{D}^{-1}(\mathbf{L} + \mathbf{U}) = -\mathbf{D}^{-1}(\mathbf{A} - \mathbf{D})$$

$$\mathbf{g} = \mathbf{D}^{-1}\mathbf{b}$$

Критерий сходимости

$$|\lambda_i(\mathbf{B})| < 1, \qquad \forall i = 1\ldots n$$

При сходимости справедливо:

- $\|\mathbf{B}\| < 0$ при $\forall \mathbf{x}_0$
- $q = \|\mathbf{B}\|$
  (q — скорость сходимости, т.е. решение будет сходиться к истинному со скоростью геометрической прогрессии)
- $\|\mathbf{x}_k - \mathbf{x}\| < q^k \|\mathbf{x}_0 - \mathbf{x}\|$

Метод требует задания начальных условия, т.е. вектора $\mathbf{x}_0$, выбор которого влияет на сходимость к истинному решению

Итерационные методы решения СЛАУ

Метод Гаусса—Зейделя

Решение рассчитывается итерационно

- в векторно-матричном виде

$$(\mathbf{L}+\mathbf{D})\mathbf{x}_{k+1} = -\mathbf{U}\mathbf{x}_k + \mathbf{B}$$

- в поэлементном виде

$$x_{i,k+1} = \sum_{j=1}^{i-1} c_{ij} x_{j,k+1} + \sum_{j=i+1}^{n} c_{ij} x_{j,k} + d_i$$

где

$\mathbf{L}$, $\mathbf{U}$ — нижняя и верхняя треугольные части $\mathbf{A}$

$$\mathbf{D} = \operatorname{diag}(\mathbf{A})$$

$$c_{ij} = \begin{cases} -\dfrac{a_{ij}}{a_{ii}}, & j \neq i \\ 0, & j = i \end{cases}$$

$$d_i = \frac{b_i}{a_{ii}}$$

Критерий сходимости

$$\left\| -(\mathbf{L}+\mathbf{D})^{-1}\mathbf{U} \right\| < 1$$

Как правило сходится для:

- симметричных и положительно определённых матриц;
- матриц с доминирующими диагональным элементами.

Может сходиться и при невыполнении этих условий

Схема вычислений

$$\begin{bmatrix} x_{1,k} \\ x_{2,k} \\ x_{3,k} \end{bmatrix} \xrightarrow[i=1]{} \begin{bmatrix} x_{1,k+1} \\ x_{2,k} \\ x_{3,k} \end{bmatrix} \xrightarrow[i=2]{} \begin{bmatrix} x_{1,k+1} \\ x_{2,k+1} \\ x_{3,k} \end{bmatrix} \xrightarrow[i=3]{} \begin{bmatrix} x_{1,k+1} \\ x_{2,k+1} \\ x_{3,k+1} \end{bmatrix} \xrightarrow{k=k+1} \begin{bmatrix} x_{1,k} \\ x_{2,k} \\ x_{3,k} \end{bmatrix}$$

Итерационные методы решения СЛАУ

Метод релаксации

Решение рассчитывается итерационно

- в векторно-матричном виде

$$\left(\omega\mathbf{L}+\mathbf{D}\right)\mathbf{x}_{k+1}=-\left(\omega\mathbf{U}+\left(\omega-1\right)\mathbf{D}\right)\mathbf{x}_k+\omega\mathbf{B}$$

- в поэлементном виде

$$x_{i,k+1}=(1-\omega)x_{i,k}+\frac{\omega}{a_{ii}}\left(b_i-\sum_{j<i}a_{ij}x_{j,k+1}-\sum_{j>i}a_{ij}x_{j,k}\right)$$

За счет коэффициента релаксации ω имеется возможность обеспечить более быструю сходимость

Выбор коэффициента релаксации

$$\omega=1+\left(\frac{\rho(\mathbf{T})}{1+\sqrt{1-\rho(\mathbf{T})^2}}\right)^2$$

$$\mathbf{T}=\mathbf{I}-\mathbf{D}^{-1}\mathbf{A}$$

$$\rho(\mathbf{T})=\max|\lambda_i(\mathbf{T})|$$

где

$\rho(\cdot)$ — спектральный радиус матрицы

данный подход сформирован для трехдиагональных матрицы, а в общем случае выбор коэффициента релаксации — не тривиален

Для симметричных, положительно полуопределенных матриц метод гарантированно сходится при $0<\omega<2$

Численные методы решения СЛАУ

Методы Крыловского типа

Методы Крыловского типа — это методы в которых, фактически, решается следующая оптимизационная задача

$$(\mathbf{Ax}, \mathbf{x}) - 2(\mathbf{b}, \mathbf{x}) \to \min$$

Метод сопряженных градиентов

$\mathbf{A}$ – действительная, симметричная и положительно определённая матрица

Метод бисопряженных градиентов

$\mathbf{A}$ – действительная и положительно определённая матрица

Стабилизированный метод бисопряженных градиентов

$\mathbf{A}$ – действительная и положительно определённая матрица

Дополнительное условие выхода $\dfrac{\|\mathbf{r}_k\|}{\|\mathbf{b}\|} \le \varepsilon$

увеличение применимости и повышение устойчивости (сходимости)

Метод сопряженных градиентов

Инициализация:

$$\mathbf{r}_0 = \mathbf{b} - \mathbf{A}\mathbf{x}_0$$

$$\mathbf{z}_0 = \mathbf{r}_0$$

k-ая итерация:

$$\alpha_k = \frac{(\mathbf{r}_{k-1}, \mathbf{r}_{k-1})}{(\mathbf{A}\mathbf{z}_{k-1}, \mathbf{z}_{k-1})}$$

$$\mathbf{x}_k = \mathbf{x}_{k-1} + \alpha_k \mathbf{z}_{k-1}$$

$$\mathbf{r}_k = \mathbf{r}_{k-1} - \alpha_k \mathbf{A}\mathbf{z}_{k-1}$$

$$\beta_k = \frac{(\mathbf{r}_k, \mathbf{r}_k)}{(\mathbf{r}_{k-1}, \mathbf{r}_{k-1})}$$

$$\mathbf{z}_k = \mathbf{r}_k + \beta_k \mathbf{z}_{k-1}$$

Метод бисопряженных градиентов

Инициализация:

$$\mathbf{r}_0 = \mathbf{b} - \mathbf{A}\mathbf{x}_0 \qquad \mathbf{z}_0 = \mathbf{r}_0$$

$$\mathbf{p}_0 = \mathbf{r}_0 \qquad \mathbf{s}_0 = \mathbf{r}_0$$

k-ая итерация:

$$\alpha_k = \frac{(\mathbf{p}_{k-1}, \mathbf{r}_{k-1})}{(\mathbf{s}_{k-1}, \mathbf{A}\mathbf{z}_{k-1})}$$

$$\mathbf{x}_k = \mathbf{x}_{k-1} + \alpha_k \mathbf{z}_{k-1}$$

$$\mathbf{r}_k = \mathbf{r}_{k-1} - \alpha_k \mathbf{A}\mathbf{z}_{k-1}$$

$$\mathbf{p}_k = \mathbf{p}_{k-1} - \alpha_k \mathbf{A}^T \mathbf{s}_{k-1}$$

$$\beta_k = \frac{(\mathbf{p}_k, \mathbf{r}_k)}{(\mathbf{p}_{k-1}, \mathbf{r}_{k-1})}$$

$$\mathbf{z}_k = \mathbf{r}_k + \beta_k \mathbf{z}_{k-1}$$

$$\mathbf{s}_k = \mathbf{p}_k + \beta_k \mathbf{s}_{k-1}$$

Стабилизированный метод бисопряженных градиентов

Инициализация:

$$\mathbf{r}_0 = \mathbf{b} - \mathbf{A}\mathbf{x}_0$$

$$\rho_0 = \alpha_0 = \omega_0 = 1$$

$$\tilde{\mathbf{r}}_0 = \mathbf{r}_0$$

$$\upsilon_0 = \mathbf{p}_0 = 0$$

$$(\mathbf{q}, \mathbf{d}) = \sum_{i=1}^{n} q_i^* d_i$$

$$[\mathbf{q}, \mathbf{d}] = \sum_{i=1}^{n} q_i d_i$$

k-ая итерация:

$$\rho_k = (\tilde{\mathbf{r}}, \mathbf{r}_{k-1})$$

$$\beta_k = \frac{\rho_k}{\rho_{k-1}} \frac{\alpha_{k-1}}{\omega_{k-1}}$$

$$\mathbf{p}_k = \mathbf{r}_{k-1} + \beta_k (\mathbf{p}_{k-1} - \omega_{k-1} \upsilon_{k-1})$$

$$\upsilon_k = \mathbf{A}\mathbf{p}_k$$

$$\alpha_k = \frac{\rho_k}{(\tilde{\mathbf{r}}, \upsilon_k)}$$

$$\mathbf{s}_k = \mathbf{r}_{k-1} - \alpha_k \upsilon_k$$

$$\mathbf{t}_k = \mathbf{A}\mathbf{s}_k$$

$$\omega_k = \frac{[\mathbf{t}_k, \mathbf{s}_k]}{[\mathbf{t}_k, \mathbf{t}_k]}$$

$$\mathbf{x}_k = \mathbf{x}_{k-1} + \alpha_k \mathbf{p}_k + \omega_k \mathbf{s}_k$$

$$\mathbf{r}_k = \mathbf{s}_k - \omega_k \mathbf{t}_k$$